**第2讲 一元一次不等式和不等式组**

**一、课程目标**

1.了解一元一次不等式（组）的概念

2.掌握一元一次不等式的解法，并能在数轴上表示一元一次不等式的解集.

3.掌握一元一次不等式组的解法，会用数轴确定由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集.

4.能根据实际问题中的数量关系，列出一元一次不等式(组)解决简单的实际问题

**二、课程内容**

**知识点一 一元一次不等式**

**1.定义:**含有**一个**未知数,未知数的次数是**1**的不等式,叫做一元一次不等式.

**判别条件:**(1)都是整式;(2)只含一个未知数;(3)未知数的次数是1;(4)未知数的系数不为O.

**2.一元一次不等式与一元一次方程间的关系:**

**相同点:**两者都只含一个未知数,未知数的次数都是1,左、右两边都是整式;

**不同点:**一元一次方程表示的是**相等关系**,而一元一次不等式表示的是**不等关系**.  
**3.易错警示:**判断一个不等式是否为一元一次不等式,必须化简整理后再判断,如果化简后不等号的两边都是整式且只含一个未知数,未知数的次数为1且系数不为0,那么此不等式为一元一次不等式.

**题型一 利用定义识别一元一次不等式**

**例1-1** 下列不等式中,一元一次不等式有(  )  
(1)   (2)   (3)

（4） （5）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. 1个 | B. 2个 | C. 3个 | D. 4个 |

【思路分析】根据一元一次不等式的定义“不等式的两边都是整式,只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是1”,进行判断即可得出答案.

【解】(1)存在二次项,错误;  
(2)未知数在分母上,是分式方程，错误;  
(3)有两个未知数,所以不是一元一次不等式,错误;  
(4)是数字不是字母，是一元一次不等式；(5)是一元一次不等式.  
(1)(2)(3)不符合,(4)中分母上的是常数,所以(4)(5)符合一元一次不等式的定义.  
所以B选项是正确的.

【总结提示】本题考查一元一次不等式的识别,注意理解一元一次不等式的三个特点:  
(1)不等式的两边都是整式;  
(2)只含1个未知数;

(3)未知数的次数是1次。

**配套练习1-1**

下列各式中，是一元一次不等式组的有（）

①；②；③；

④；⑤；⑥

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. 1个 | B. 2个 | C. 3个 | D. 4个 |

答案：B

**知识点二 一元一次不等式的解法**

**l.解一元一次不等式的步骤:**  
(1)去分母;(2)**去括号**;(3)**移项**;(4)合并同类项;(5)**系数化为1**.  
**2.解一元一次不等式与解一元一次方程的区别与联系:**

解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程的步骤非常相似,即前四步的去分母、去括  
号、移项、合并同类项都一样，不同之处主要表现在:在整个过程中,解一元一次方程用的是等式的性质;而解一元一次不等式用的是不等式的性质,即解一元一次不等式时,要特别注意负号和不等号的方向问题.  
**3.易错警示:**在去分母和系数化为1时,如果不等式两边都乘(或除以)**同一个负数**,不等号要**改变方向**.

**题型一 利用一元一次不等式的解法步骤解一元一次不等式**

**例2-1** 解不等式 

【思路分析】首先进行去分母，然后进行去括号，移项合并同类项，从而得出不等式的解.

【解】去分母得：   
去括号，得：   
移项，得：   
合并同类项，得：   
解得：.

【总结提示】解一元一次不等式时，**有两步可能会改变不等号的方向：其一**去分母；**其二**系数化为1.为了使问题更加简便，可以在“去分母”这一步里,两边同乘一个正数,这样，使“改变不等号方向”的问题落到“系数化为1”这一步，由于要注意的只有这步，这样就不容易出错了.

**配套练习2-1**

解不等式，并把解集在数轴上表示出来．

 ．

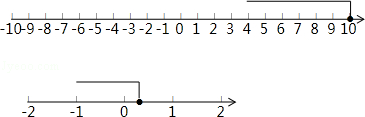
【解】去分母，得：，

去括号，得：，

移项合并同类项，得：，

系数化1，得：．

数轴如下图所示



**题型二 利用解集确定一元一次不等式的特殊解**

**例2-2** 求不等式的非负整数解.

**【**思路解析**】：**先求出不等式的解集，再按照题目的要求求出特殊解.

【解】解不等式，得.

所以这个不等式的非负整数解为0，1，2，3，4.

【总结提示】正确理解关键词语的含义是准确解题的关键，“非负整数解”即0和正整数解.

**配套练习2-2**

求不等式的非负整数解.

【解】去分母得:,   
去括号得:,   
移项得:,   
合并同类项得:,   
系数化为1得:,   
故不等式的非负整数解为:0，1,2,3.

**题型三 利用一元一次不等式的解集求字母的值**

**例2-3-1** 如果关于的不等式和的解集相同，则的值为（　　）

A．7 B．8 C．9 D．10

【思路分析】先把字母当成常数,求出两个关于的不等式的解集,再根据两个不等式的解集相同，得出关于的方程,最后求出的值.

【解】由可知；

（1）当时，可化为：，

∴，

解得：；

（2）当时，取一切实数；

（3）当时，可化为：，

与题意不符，故不成立．

综上，可知；

故选A．

【总结提示】(1)化简整理后，若未知数的系数含字母,则需分类讨论;若未知数的系数不含字母，则不需讨论,直接由两不等式解集间的关系求字母常数的值或范围.

(2)若与解集相同,则;若的解是的解，则,不要误认为,这里实质是的解集包含的解集.

**配套练习2-3-1**

如果关于的不等式的解集为．那么的取值范围是（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A． | B． | C． | D． |

【解】∵关于的不等式的解集为，  
∴，  
即，  
故选B．

**题型四 利用一元一次不等式的解集求字母取值范围**

**例2-3-2** 如果不等式 有3个正整数解，那么的取值不可以是（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A．9 | B．10 | C．11 | D．12 |

【思路分析】先解不等式，再结合不等式的正整数解可得关于的不等式，解之可得．

【解】解得，  
∵不等式有3个正整数解，  
∴不等式的正整数解为1、2、3，  
∴，  
解得：，  
∴m的取值不可以是12，  
故选：D．

【总结提示】**已知一个不等式的解集满足特定要求,求字母参数的取值范围的方法:**我们可先解出这个含字母参数的不等式的解集，然后根据题意列出一个关于字母参数的不等式，从而可求出字母参数的取值范围.

**配套训练2-3-2**

若实数3是不等式的一个解，则可取的最小正整数为（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A．2 | B．3 | C．4 | D．5 |

【解】根据题意，是不等式的一个解，  
∴将代入不等式，得：，  
解得：，  
则可取的最小正整数为5，  
故选：D．

**知识点三 一元一次不等式的实际应用**

**列不等式解应用题的基本步骤:**  
与列方程解应用题的步骤类似，可概括为:“**审、设、找、列、解、答**”六步; 其不同点是方程是找相等关系,不等式是找不等关系.

**注：**(1)列不等式解应用题的关键是建立不等式的模型;列不等式时要注意不等号是否包含等号；  
(2)检验一个解是不是应用题的解时，必须满足两点:**一是**不等式的解;**二要**符合实际情况.

**题型一 利用建立不等式模型解决实际问题**

**例3-1** 某物流公司，要将300吨物资运往某地，现有A、B两种型号的车可供调用，已知A型车每辆可装20吨，B型车每辆可装15吨，在每辆车不超载的条件下，把300吨物资装运完，问：在已确定调用5辆A型车的前提下至少还需调用B型车多少辆？

【思路分析】本题有一个不等关系,那就是A,B 两种型号的汽车总共调运的物资的吨数不少于300 吨,根据这个不等关系,列出一个一元一次不等式,求出调用B型车辆数的范围.最后根据车辆数必须为整数,得出至少调用B 型车的辆数.

【解】设还需调用辆B型车辆，则列出不等式为



解不等式，得



因为车辆数是整数，则最少取14时，就可完成任务，

所以至少需要B型车辆14辆.

【总结提示】建立不等式模型解决实际问题的关键是找出代表本题不等关系的式子，从而根据需要设出相应的未知数,然后得出结果.本题中由于车的辆数为正整数,因此要在这个范围内取最小整数解.

**配套练习3-1**

在某校班际篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜一场得3分，负一场得1分，如果某班要在第一轮的28场比赛中至少得43分，那么这个班至少要胜多少场？

【解】设这个班在比赛中胜场，则负场，根据题意可得，即，，因为取整数，所以符合条件的最小整数值为8，即至少要胜8场才能在第一轮比赛中至少得43分.

**题型二 （高频考点）利用不等式与方程组的模型解决综合应用问题**

**例3-2** 某电器商场销售*A*、*B* 两种型号计算器，两种计算器的进货价格分别为每台 30 元， 40 元，商场销售 5 台 *A* 型号和 1 台 *B* 型号计算器，可获利润 76 元；销售 6 台 *A* 型号和 3 台 *B* 型号计算器，可获利润 120 元。

(1)求商场销售*A*、*B*两种型号计算器的销售价格分别是多少元 ?( 利润 = 销售价格 − 进货价格 )

(2)商场准备用不多于 2500 元的资金购进*A*、*B* 两种型号计算器共 70 台，问最少需要购进 *A* 型号的计算器多少台 ?

【思路分析】（1）首先设A种型号计算器的销售价格是元，B种型号计算器的销售价格是元，根据题意可等量关系：①5台A型号和1台B型号计算器，可获利润76元；②销售6台A型号和3台B型号计算器，可获利润120元，根据等量关系列出方程组，再解即可；   
（2）根据题意表示出所用成本，进而得出不等式求出即可．

【解】(1)设 *A* 种型号计算器的销售价格是元， *B* 种型号计算器的销售价格是元，由题意得： ，整理可得： ，解得 .

*A* 种型号计算器的销售价格是 42 元，*B* 种型号计算器的销售价格是 56 元.

(2)设购进 *A* 型计算器台 , 则购进 *B* 台计算器：台，

则，

解得：，

所以最少需要购进*A*型号的计算器30台.

【总结提示】运用方程组或不等式解决实际问题时，从实际问题中发现相等关系或不等关系，通过方程组模型或不等式模型解决实际问题.列不等式解应用题时:首先审题找出题中的未知量和所有的已知量，直接设要求的未知量或间接设一关键的未知量为,然后用含的式子表示相关的量，找出其间的不等关系列不等式，求解，作答，即设、列、解、答.

**配套练习3-2**

某大型快递公司使用机器人进行包裹分拣,若甲机器人工作2h,乙机器人工作4h,一共可以分拣700件包裹;若甲机器人工作3h,乙机器人工作2h,一共可以分拣650件包裹.   
(1)求甲、乙两机器人每小时各分拣多少件包裹;   
(2)“双十一”期间,快递公司的业务量猛增,要让甲、乙两机器人每天分拣包裹的总数量不低于2250件,它们每天至少要一起工作多少小时?

【解】(1)设甲、乙两机器人每小时各分拣件、件包裹,根据题意得   
,计算得出,   
答:甲、乙两机器人每小时各分拣150件、100件包裹;   
(2)设它们每天要一起工作小时,根据题意得   
,   
计算得出.   
答:它们每天至少要一起工作9小时.

**知识点四 一元一次不等式组**

**1.定义:**把**几个**含有**相同未知数**的一元一次不等式合在一起,就组成了一个一元一次不等式组.

**注:**

(1)这里的“几个”是指两个或两个以上;

(2)每个不等式只能是一元一次不等式;

(3)每个不等式必须含有同一个未知数.  
**2.易错警示:**判断一个不等式组是否为一元一次不等式组，常出现以下几种错误:  
①不等式组中不都是一元一次不等式;  
②不等式组中不是只有一个未知数.

**题型一 一元一次不等式组的识别**

**例4-1** 下列各不等式组中是一元一次不等式组的有    （填序号）.

① ② ③

④ ⑤ ⑥

【思路分析】利用一元一次不等式组的定义来识别.

【解】根据一元一次不等式组的定义可得，③④⑤是一元一次不等式组；

①中的不等式组含有两个未知数，不符合一元一次不等式组的定义，故不是一元一次不等式组；

②中未知数的最高次数是2，不符合一元一次不等式组的定义，故不是一元一次不等式组.

⑥中的不是整式，不符合一元一次不等式组的定义，故不是一元一次不等式组.

【总结提示】**判定一个不等式组是否为一元一次不等式组，要从以下两个方面考虑:**

(1)组成不等式组的每个不等式必须是一元一次不等式;(2)这个不等式组中只含有一个未知数.

**配套练习4-1**

下列各不等式组是一元一次不等式组的是（　　）

A. B. 

C. D. 

答案：C

**知识点五 （难点）一元一次不等式组的解集**

**1.定义：**一般地，几个不等式的解集的**公共部分**，叫做由它们所组成的不等式组的**解集**.

**2.一元一次不等式组解集的四种情况：**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 不等式组 |  |  |  |  |
| 不等式组的解集 |  |  | 无解 |  |
| 不等式组的解集在数轴上的表示 |  |  |  |  |
| 巧记口诀 | 同大取大 | 同小取小 | 大大小小无处找 | 大小小大中间找 |

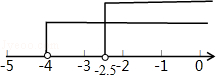
**题型一 利用数轴求下列不等式组的解集**

**例5-1** 利用数轴，确定下列不等式组的解集

（1）； （2）； （3）； （4） ．

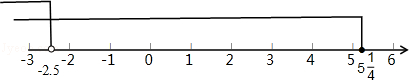
【思路分析】将不等式组的两个不等式解集分别表示在数轴上，根据数轴确定两不等式解集的公共部分，从而得出不等式组的解集．

【解】（1）将两不等式解集表示在数轴上如下所示：



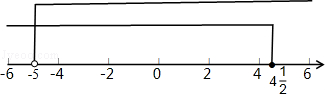
故不等式组解集为：；

（2）将两不等式解集表示在数轴上如下所示：



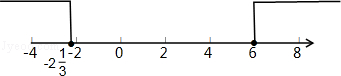
故不等式组解集为：；

（3）将两不等式解集表示在数轴上如下所示：



故不等式解集为：；

（4）将两不等式解集表示在数轴上如下所示：



故不等式组无解．

【总结提示】**确定一元一次不等式组解集的常用方法：**

(1)**数轴法:**就是将几个不等式的解集在同一数轴上表示出来，然后标出它们的公共部分,这个公共部分就是此不等式组的解集，如果没有公共部分，那么这个不等式组无解.这种方法体现了数形结合思想，既直观又明了，易于掌握.

(2)**口诀法:**“同大取大”“同小取小”“大小小大中间找““大大小小无处找”，该方法便于记忆.

**配套练习5-1**

尝试利用数轴确定不等式组的解集．

【解】

，

由①得，，

由②得,，

由③得：，

在数轴上表示为：

故此不等式组的解集为：．

菁优网：http://www.jyeoo.com

**题型二 逆用不等式组的解集的意义求字母的值**

**例5-2**（中考真题） 关于的不等式组 的解集是，则= ．

【思路分析】不等式组的解集是，即，可求.

【解】因为，  
所以不等式组的解集是.  
又因为不等式组的解集是，  
所以.  
所以.

【总结提示】解答这类题，一般先将字母视为常数,再逆用不等式组解集的意义，由不等式组的解集反推出含字母的方程,最后求出字母的值.

**配套练习 5-2**

（中考真题） 若一元一次不等式组的解集为，则的取值范围是    .

【解】由不等式组，得

因为不等式组的解集为，

所以.

**知识点六 （重点）解一元一次不等式组**

**1.定义:**求不等式组的解集的过程叫做解不等式组.  
**2.解一元一次不等式组的一般步骤:**(1)分别解每一个不等式;  
(2)利用数轴法或口诀法确定不等式组的解集;  
(3)写出不等式组的解集.

**注：**(1)在数轴上表示不等式组的解集时要注意两点，**一是**向右画还是向左画;**二是**用实心圆点还是空心圆圈.  
(2)当一个不等式组含有三个或三个以上的不等式时，也可通过数轴寻找这几个不等式的解集的公共部分.

**题型一 利用解不等式组的步骤解一元一次不等式组**

**例6-1** 解下列一元一次不等式组:   
1.   
2. 

【思路分析】根据解不等式组的一般步骤，分别解不等式组中的每个不等式，把它们的解集在数轴上表示出来,找出解集的公共部分，从而得出不等式组的解集.

【解】1.  ;  
解不等式①,得 .解不等式②,得 .在数轴上表示不等式①和②的解集,如图.   
https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/1584e28ee83a7a8.png  
这两个不等式解集的公共部分是 .   
所以原不等式组的解集是 .   
2.  ;   
解不等式①,得 .解不等式②,得 .在数轴上表示不等式①和②的解集,如图   
https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/1584e28f4af4e52.png  
从数轴上可以看出,这两个不等式的解集没有公共部分.   
所以原不等式组无解.

**配套练习6-1**

不等式组的解集在数轴上的表示正确的是( )

A、https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/148868f11aff9a6.png B、https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/148868f11a3d7c8.png  
C、https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/148868f11898746.png D、https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/148868f11bb50a8.png

答案：D

**配套练习6-2** . 

 ;  
解不等式①,得 .解不等式②,得 .在数轴上表示不等式①和②的解集,如图   
https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/1584e28f8eefa3c.png  
这两个不等式解集的公共部分是 .   
所以原不等式组的解集是 .

【总结提示】**解不等式组的关键:一是**要正确地求出每个不等式的解集，**二是**要利用数轴正确地表示出每个不等式的解集,并找出不等式组的解集.

**题型二 利用不等式组的特殊解或解集求未知数的值或取值范围**

**例6-2-1** 已知不等式组解集的情况

已知关于的不等式组无解，则的取值范围为\_\_\_\_\_ .

【思路分析】把看成常数，解不等式组，再根据原不等式组无解，求出的取值范围.

【解】由不等式组 ，

将https://gallery.fbcontent.cn/latex?decode=false&latex=%24%24%5Ccircled1%24%24%25移项、合并同类项得，未知数的系数化为1得，

由https://gallery.fbcontent.cn/latex?decode=false&latex=%24%24%5Ccircled2%24%24%25得；

因为不等式组无解，所以，故https://gallery.fbcontent.cn/latex?decode=false&latex=%24%24a%24%24%25的取值范围是.

【总结提示】“”这种特殊情况容易被忽视，检验等号是否满足题意在解题时必不可少.

**例6-2-2**  若关于的不等式的整数解共有4个,则m的取值范围是\_\_\_\_\_．

【思路分析】解不等式组,得,再由这个解集确定4个整数解，借助数轴，得到的取值范围.

【解】 ,  
由①得: ,  
由②得: ,  
https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/14dae80e14015e7.png不等式组的解集是,  
https://solar.fbcontent.cn/api/apolo-images/14dae80dba37420.png关于的不等式 的整数解共有4个,  
,  
因此，本题正确答案是: .

【总结提示】结合不等式组解集的确定方法,灵活运用不等式组解集的意义,构造不等式(或方程)是解此类问题的关键,本类题利用了**数形结合思想.**

**注：**解题时和的情况易被忽视，做此类型题时需注意.

**配套练习6-2**

如果关于x的不等式组，求满足下列情况时，常数的取值范围：

（1）不等式组无解；

（2）不等式组只有3个整数解．

【解】（1）∵不等式组无解，

∴，

解得：，

即常数的取值范围是；

（2）∵，

∴不等式组的解集为，

∵不等式组只有3个整数解，

∴，

解得：，

即a的取值范围为．

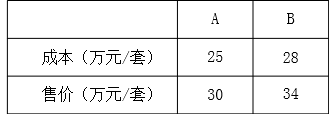
**知识点七 列一元一次不等式组**

**1.基本步骤:**审→找→列→解→答(与列一元一次不等式相同)  
(1)**审:**分清题中的已知量、未知量,并用字母表示未知量;  
(2)**找:**找出题目中的不等关系;  
(3)**列:**根据不等关系列出不等式组;  
(4)**解：**求出不等式组的解集;

(5)**答:**检验解集是否合理,写出符合实际意义的答案.  
**2.易错警示:**  
(1)设未知数时，要去掉“不少于”“不超过”之类词语，换成确定性的词语;  
(2)对答案的取舍要满足两个条件:**一要**符合题目要求;**二要**符合实际情况.

**题型一 利用不等式组解决实际应用中的方案问题**

**例7-1**我市某房地产开发公司计划建A、B两种户型的住房共80套，该公司所筹集资金不少于2090万元，但不超过2096万元，且所筹资金全部用于建房，两种户型的建房成本和售价如下表所示.



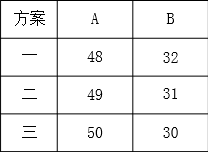
（1）该公司对这两种户型住房有哪几种建房方案？

（2）该公司如何建房获得利润最大？

【思路分析】（1）根据题意设出未知数，由题目给出的条件列出不等式并求解，注意到为整数即可；

（2）根据题目给的表格可先算出两种房型的利润并写出利润的表达式，再由（1）比较每种情况下利润的大小即可求解.

【解】（1）设建A型套，则建B型套，由题意可得：，解得： ，因为为整数，所以；共三种方案，如表所示.



（2）设利润为万元，则：，所以当时，有最大值，为432万元，故建A型48套，B型32套，获最大利润是432万元；

【总结提示】**求实际问题中方案的种类或最大值(最小值)问题的方法:**常通过求不等式(组)的解集，分类讨论找出答案，即先根据题意,设出未知数，列出不等式(组),求出相应的取值范围,再根据题目的条件分类讨论,写出答案，

**配套练习7-1**

(**中考真题**)某市教育局对某镇实施“教育精准扶贫”，为某镇建中、小型两种图书室共30个．计划养殖类图书不超过2000本，种植类图书不超过1600本．已知组建一个中型图书室需养殖类图书80本，种植类图书50本；组建一个小型图书室需养殖类图书30本，种植类图书60本．

（1）符合题意的组建方案有几种？请写出具体的组建方案；

（2）若组建一个中型图书室的费用是2000元，组建一个小型图书室的费用是1500元，哪种方案费用最低，最低费用是多少元？

【解】（1）设组建中型两类图书室个、小型两类图书室个．

由题意，得，

化简得 ，

解这个不等式组，得．

由于只能取整数，∴的取值是20，21，22．

当时，；

当时，；

当时，．

故有三种组建方案：

方案一，中型图书室20个，小型图书室10个；

方案二，中型图书室21个，小型图书室9个；

方案三，中型图书室22个，小型图书室8个．

（2）方案一的费用是：（元）；

方案二的费用是：（元）；

方案三的费用是：（元）；

故方案一费用最低，最低费用是55000元